

Questions de cours

Enoncer le théorème de division euclidienne. Prouver la partie "unicité".

Exercice 1 (Polynômes Cyclotomiques).

Soit n un entier

- (a) Quels sont les racines du polynôme $X^n - 1$ dans \mathbb{C} ?

On note ϕ_n le polynôme unitaire à racines distinctes dont les racines sont les racines $n^{\text{ième}}$ primitives de l'unité. On l'appelle $n^{\text{ième}}$ *polynôme cyclotomique*.

- (b) Calculer ϕ_1 , ϕ_2 et ϕ_3
(c) Exprimer $X^n - 1$ l'aide de ϕ_d avec des entiers d bien choisis.
(d) Montrer par récurrence forte que les ϕ_n sont à coefficients entiers.

Questions de cours

- (a) Donner la définition d'un polynôme.
(b) Montrer que $a \in \mathbb{K}$ est racine d'un polynôme P si et seulement si $X - a$ divise P .

Exercice 2.

On note $P(X) = X^4 + 1$.

- (a) Décomposer P en facteurs irréductibles sur \mathbb{C} , \mathbb{R} et \mathbb{Q} . Sur quel corps a-t-il des racines ? Sur quel corps est-il irréductible ?
(b) Soit \mathbb{K} un corps quelconque. Montrer qu'un polynôme à coefficients dans \mathbb{K} de degré 2 ou 3 est irréductible si et seulement si il n'a pas de racine dans \mathbb{K} . Est-ce le cas pour des polynômes de degré plus grand ?

Exercice 3 (Un corps fini).

On note $P(X) = X^4 + 1$ On appelle \mathbb{F}_2 l'ensemble $\{0, 1\}$ muni des opérations suivantes :

$+$	0	1
0	0	1
1	1	0

\times	0	1
0	0	0
1	0	1

- (a) Justifier que \mathbb{F}_2 est un corps.
(b) Calculer $P(0)$ et $P(1)$ dans \mathbb{F}_2 .
(c) Décomposer P en facteurs irréductibles sur \mathbb{F}_2 .
(d) Quels sont les polynômes irréductibles de degré inférieur ou égale 3 sur \mathbb{F}_2 ?

Questions de cours

Soient P et Q des polynômes. Que peut-on dire de

- (a) $\deg(PQ)$?
(b) $\deg(P + Q)$?

Justifier et donner des exemples dans chaque cas.

Exercice 4.

Effectuer la division euclidienne

- (a) de $X^4 + 5X^3 + 12X^2 + 19X - 7$ par $X^2 + 3X - 1$.
(b) de $X^6 - X^3 + 1$ par $X^2 - X + 1$.

Exercice 5.

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ différent de X . Montrer que le polynôme $P(X) - X$ divise $Q(X) = P(P(X)) - X$.

Questions de cours

- (a) Donner la définition d'un polynôme irréductible.
- (b) Enoncer le théoreme de D'Alembert-Gauss.
- (c) Décrire les polynômes irréductibles sur \mathbb{R} et \mathbb{C} .

Exercice 6.

Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P(X^2 + 1) = P(X)^2 + 1$ et $P(0) = 0$.

Exercice 7.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$

- (a) Déterminer les racines de $X^2 + X + 1$ dans \mathbb{C} .
- (b) Pour quelles valeurs de n le polynôme $X^2 + X + 1$ divise-t-il $(X + 1)^n + X^n + 1$?