Questions de cours

Enoncer le théorème de division euclidienne. Prouver la partie "unicité".

Exercice 1.

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 2 (Polynômes Cyclotomiques).

Soit n un entier

(a) Quelles sont les racines du polynôme $X^n - 1$ dans $\mathbb{C}$? Les écire sous forme polaire.

(b) Quelles sont les racimes de $X^n - 1$ sur $\mathbb{C}$ qui ne sont pas racines de $X^d - 1$ pour tout $d < n$. On les appelle les *racines primitives* n^{ieme} *de l'unités.*

On note ϕ_n le polynômes unitaire à racines distinctes dont les racines sont les racines n^{ieme} primitives de l'unité. On l'appelle $n^{ième}$ *polynôme cyclotomique.*

(c) Calculer ϕ_1, ϕ_2 et ϕ_3

(d) Exprimer $X^n - 1$ l'aide de ϕ_d avec des entiers d bien choisis.

(e) Montrer par récurence forte que les ϕ_n sont à coefficients entiers.

Questions de cours

(a) Donner la définition d'un polynôme irreductible.

(b) Décrire en justifiant les polynômes irreductibles sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$.

Exercice 3.

(a) Décomposer $X^4 - X^2 + 1$ en produit de polynômes irreductibles

(b) Faire la liste de tous ses diviseurs.

Exercice 4.

Soit $\mathbb{K}$ un corps quelconque. Montrer qu'un polynôme a coefficients dans $\mathbb{K}$ de degré 2 ou 3 est irréductible si et seulement si il n'a pas de racine dans $\mathbb{K}$. Est-ce le cas pour des polynômes de degré plus grand ?

Questions de cours

(a) Ennoncer le théoreme de D'Alembert-Gauss.

(b) Montrer que $a \in \mathbb{K}$ est racine d'un polynôme P si et seulement si $X - a$ divise P.

Exercice 5.

Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ puis $\mathbb{C}(X)$, la fraction

$$\frac{X^6 - X^3 + 1}{X^2 - X + 1}.$$

Exercice 6.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$

(a) Déterminer les racines de $X^2 + X + 1$ dans $\mathbb{C}$.

(b) Pour quelles valeurs de n le polynôme $X^2 + X + 1$ divise-t-il $(X+1)^n + X^n + 1$?

Questions de cours

Ennoncer le critère sur les racines multiples d'un polynôme et démontrer l'implication facile.

Exercice 7.

Calculer le n^{iem} terme de la suite definie par

$$u_0 = 1, u_1 = 1 \text{ et } u_{n+1} = u_n + 2u_{n-1} \forall n \in \mathbb{N}.$$

Indication : Montrer que $A = MDM'$ puis calculer $M'M$où

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, M = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, M' = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 8.

Montrer que le polynôme $P_n(X) = \sum_{k=0}^{n} \frac{X^k}{k!}$ n'as pas de racines multiples.

1 Exercices Suplémentaires

Exercice 9.

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ différant de X. Montrer que le polynôme $P(X) - X$ divise $Q(X) = P(P(X)) - X$.

Exercice 10.

Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P(X^2+1) = P(X)^2 + 1$ et $P(0) = 0$.

Exercice 11.

Décomposer $X^4 + 1$ en facteurs irréductibles sur $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{Q}$. Sur quel corps a-t-il des racines ? Sur quel corps est-il irréductible ?

Exercice 12 (Un corps fini).

On note $P(X) = X^4 + 1$. On appelle $\mathbb{F}_2$ l'ensemble $\{0, 1\}$ muni des operations suivantes :

$+$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\times$	0	1
0	0	0
1	0	1

(a) Justifier que $\mathbb{F}_2$ est un corps.

(b) Calculer $P(0)$ et $P(1)$ dans $\mathbb{F}_2$.

(c) Décomposer P en facteurs irréductibles sur $\mathbb{F}_2$.

(d) Quels sont les polynômes irréductibles de degré inférieur ou égale à 3 sur $\mathbb{F}_2$?