Questions de cours

Ennoncer et démontrer le théorème de Rolle

Exercice 1.

Soit $f : x \mapsto \frac{1}{1-x} e^{\frac{1}{1-x}}$.

(a) Quel est le domaine de definition de f ?

(b) Determiner la fonciton dérivée de f sur son domaine de définition

(c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe un polynôme P_n tel que $f^{(n)}(x) = P_n(\frac{1}{1-x}) e^{\frac{1}{1-x}}$

Exercice 2.

Soient f, g des fonctions continues sur un interval $[a, b]$. On supose que $f(a) \neq f(b)$ et $g(a) \neq g(b)$. Montrer qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que

$$\frac{f'(c)}{f(a) - f(b)} = \frac{g'(c)}{g(a) - g(b)}$$

Questions de cours

Ennoncer et démontrer ke théorème des accroissements finis.

Exercice 3.

(a) Justifier l'existence et calculer les dérivées des fonctions sur $\mathbb{R}$ suivantes

$$f : x \mapsto \arctan(e^x), \quad g : x \mapsto \arctan(\sinh(x)), \quad h : x \mapsto \arctan(\tanh(x))$$

où $\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$.

(b) En déduire des relations entre ces trois fonctions.

Exercice 4.

Soit f une fonction continue sur un interval $[a, b]$, à valeurs strictement positives et dérivable sur $]a, b[$. Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$\frac{f(b)}{f(a)} = \exp\left(\frac{f'(c)(b - a)}{f(c)}\right)$$

Questions de cours

Montrer qu'une combinaison linéaire de fonction dérivables sur une intervalle ouver I est dérivable. Donner une formule pour la fonction dérivée.

Exercice 5.

(a) Construire une suite de fonction continues $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur l'interval $[-1,1]$ telle que pour tout n

— f_n soit dérivable en 0 et $f_n'(0) \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$;

— $\max_{x\in[-1,1]} |f_n(x)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

(b) On muni les l'espace de fonctions continue $C_0([-1,1],\mathbb{R})$ d'une norme :

$$||f||_\infty = \max_{x\in[0,1]}(|f(x)|)$$

Cette norme est pour les fonctions ce que la valeur absolue est pour les nombres réels. Elle Détermine la distance entre deux fonctions.

i. Soit $F : C([-1,1],\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ une application qui a une fonction associe un nombre. A votre avis, quand est-ce qu'on dit que F est continue ?

ii. En utilisant cette définition et la question (a), montrer que la fonction qui a f associe sa dérivée en 0 n'est pas continue.

Questions de cours

Montrer que la composée de deux fonction dérivable est dérivable. Donner une expression de la fonction dérivée

Exercice 6.

On considére les points $A = (3,2)$ et $B = (1,0)$ dans $\mathbb{R}^2$

(a) Déterminer l'équation du cercle passant par ces deux points et dont le centre ce trouve sur l'axe des abscisses.

(b) Décrire le demi cercle contenant A et B comme le graphe d'une fonction. Quel est son ensemble de définition ? Ses extremum ? Son image ?

(c) Déterminer les tangentes au cercle aux points A et B.

(d) Discuter des tangentes au cercle aux points ou il s'intersecte avec l'axe des abscisses.

Questions de cours

Ennoncer et démontrer le résultat liant monotonie et signe de la dérivée d'une fonction dérivable sur un segment I.

Exercice 7.

Déterminer

$$\lim_{n\to\infty} (n+1)\arctan(n+1) - n\arctan(n)$$

Exercice 8 (Escalier du diable).

On rappelle que pour tout x dans $[0,1]$, il existe une suite d'éléments $a_{n,x}$ de $\{0,\ 1,\ 2\}$ tels que

$$x = \sum_{m\in\mathbb{N}^*} \frac{a_{n,x}}{3^n} \tag{1}$$

c'est l'écriture de x en base 3. Notons qu'elle n'est pas unique : on a

$$1 = 0,222\ldots$$

Pour tout $x = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{a_{n,x}}{3^n}$ on note

$$N_x = \min_{n\in\mathbb{N}^*}\{n|a_{n,x} = 1\}. \tag{2}$$

On considére l'ensemble

$$C = \{x \in [0,1] \text{ avec une décomposition ternaire telle que } \forall n \in \mathbb{N}^*, a_{n,x} \in \{0,2\}\}$$

et on définit la fonction

$$F : [0,1] \to [0,1] \tag{3}$$

$$x \mapsto \frac{1}{2^{N_x}} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N_x} \frac{a_{n,x}}{2^n} \tag{4}$$

(a) Calculer $G(0)$ et $G(1)$

(b) Montrer que G est continue

(c) Montrer que pour tout $x \notin C$, G et constante sur l'intervalle

$$\left]\sum_{n-1}^{N_x} \frac{a_{n,x}}{3^n}, \sum_{n-1}^{N_x} \frac{a_{n,x}}{3^n} + \frac{2}{3^{N_x+1}}\right[.$$

Que peut on dire de la dérivée de G sur cet intervalle ?

(d) Montrer que G est croissante.

Questions de cours

(a) Donner la définition d'extremum, extremum local et de point critique d'une fonction.

(b) Soit f une fonction dérivable sur $]a, b[$. Montrer que si f admet un extremum en $c \in]a, b[$ alors c est un point critique.

Exercice 9.

On considére la focntion définie par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ e^{\frac{1}{x}} & \text{si } x > 0 \end{cases}.$$

Quel est le domaine de definition de f. Montrer que f est C^∞.

Exercice 10 (Point fixe).

Soit $f : x \mapsto 1 + \frac{1}{4}sin(\frac{1}{x})$.

(a) Déterminer $I = f(\mathbb{R}^*$ et montrer que $f(I) \subseteq I$.

(b) Montrer qu'il existe $\gamma \in I$ tel que $f(\gamma) = \gamma$.

(c) Montrer que pour tout $x \in I$ on a $f'(x) \leq \frac{4}{9}$.

(d) On considére la suite définie par récurrence par $u_0 \in \mathbb{R}^*$ et $u_{n+1} = f(u_n)$. Montrer par récurrence que

$$|u_n - \gamma| \leq (\frac{4}{9})^n|u_0 - \gamma|.$$

(e) Qu'en déduisez-vous ?

Questions de cours

Soit f une fonction définie sur un domaine D. Montrer que si f est dérivable en $x \in D$ alors elle est continue en x. Ennoncer le théorème des valeurs intermédiaires.

Exercice 11.

On considère

$$f : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{if } x = 0 \\ x^2 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) \end{cases}$$

(a) Montrer que f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$

(b) Montrer que la fonction dérivée de f n'est pas continue en 0

Exercice 12 (Théorème de Darboux).

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f one fonction dérivable. On veux prouver que f' vérified le théorème des valeurs intermédiaires.

(a) Soit $a, b \in I$ tels que $f'(a) < f'(b)$, et soit $z \in]f'(a), f'(b)[$. Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $h \in [0, \alpha]$ on ai

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} < z < \frac{f(b+h) - f(b)}{h}.$$

(b) En déduire l'existence d'un réel h et d'un point y de I tels que $y + h \in I$ et

$$z = \frac{f(y+h) - f(y)}{h}$$

(c) Montrer qu'il existe un point $x \in I$ tel que $f'(x) = z$

(d) Conclure.

Questions de cours

Montrer que le produit de fonction dérivable est dérivable et donner la formule de la fonction dérivée.

Exercice 13.

Montrer qu'il existe $M, N > 0$ tels que

$$N|x - y| \leq |e^x - e^y| \leq M|x - y|.$$

Exercice 14 (Rolle à l'infinie).

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ telle que $f(0) = \lim_{x \to +\infty} f = 0$. On souhaite montrer qu'il exsite $d \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $f'(0) = 0$. On peut supposer que f n'est pas identiquement nulle, c'est à dire qu'il existe $c > 0$tel que $f(c) > 0$.

(a) Pourquoi pouvons nous supposer cela ? Pourquoi pouvons-nous supposer que $f(c)$ est positif ?

(b) Montrer qu'il existe $a \in]0, c[$ et $b \in]c, +\infty[$ tels que $f(a) = f(b)$.

(c) conclure

1 Exercices supplémentaires

Exercice 15.

Soit n un entier et soit f la fonction définie sur [0, 1] par $f(x) = \ln(1 + x^n) + x - 1$.

(a) Montrer qu'il existe $c \in [0, 1]$ tel que $f(c) = 0$

(b) Montrer que f est croissante et donc que c est unique.

Exercice 16.

On pose

$$f(x) = \frac{x}{1+|x|} \text{ et } g(x) = \begin{cases} x\sin(x)\sin(\frac{1}{x}) & \text{if } x \neq 0 \\ 0 & \text{if } x = 0 \end{cases}$$

(a) Déterminer leurs ensembles de définition.

(b) Ces fonctions sont-elles continues en 0 ? Sont-elles dérivables en 0 ?