Questions de cours

Ennoncer et démontrer le théorème de Rolle

Exercice 1.

(a) Justifier l'existence et calculer les dérivées des fonctions sur $\mathbb{R}$ suivantes

$$f : x \mapsto \arctan(e^x), \quad g : x \mapsto \arctan(\sinh(x)), \quad h : x \mapsto \arctan(\tanh(x)).$$

(b) En déduire des relations entre ces trois fonctions.

Exercice 2 (Rolle à l'infinie).

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ telle que $f(0) = \lim_{x\to+\infty} f = 0$. On souhaite montrer qu'il exsite $d \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $f'(0) = 0$. On peut supposer que f n'est pas identiquement nulle, c'est à dire qu'il existe $c > 0$ tel que $f(c) > 0$.

(a) Pourquoi pouvons nous supposer cela ? Pourquoi pouvons-nous supposer que $f(c)$ est positif ?

(b) Montrer qu'il existe $a \in]0, c[$ et $b \in]c, +\infty[$ tels que $f(a) = f(b)$.

(c) conclure

Questions de cours

Soient α et β strictement positifs. Donner la limite quand $x \to +\infty$ de $\frac{e^{\alpha x}}{x^\beta}$ et $\frac{ln(x)^\beta}{x^\alpha}$ et faites en la preuve.

Exercice 3.

Soit $n \in$. On considère la fonction

$$f_n : x \mapsto \frac{1}{1 + |x|^n}$$

(a) Montrer que f_n est dérivable en 0.

(b) Dresser le tableau de variation de f_n.

(c) Déterminer ses points d'inflections.

(d) Faire un dessin du graphe de f_n

(e) On pose maintenant

$$f : x \mapsto \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

Déterminer f. On distinguera les cas ou $|x| \leq 1$ et $|x| > 1$. Est-ce que cette fonction est en escalier ?

Exercice 4.

Soit $f : x \mapsto \frac{1}{1-x} e^{\frac{1}{1-x}}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe un polynôme P_n tel que $f^{(n)}(x) = P_n(\frac{1}{1-x})e^{\frac{1}{1-x}}$.

Questions de cours

Enoncer et démontrer le théorème des accroissements finis.

Exercice 5.

On pose

$$f(x) = \frac{x}{1+|x|} \text{ et } g(x) = \begin{cases} x\sin(x)\sin(\frac{1}{x}) & \text{if } x \neq 0 \\ 0 & \text{if } x = 0 \end{cases}$$

(a) Déterminer leurs ensembles de définition.

(b) Ces fonctions sont-elles continues en 0 ? Sont-elles dérivables en 0 ?

Exercice 6.

Soit $f : [a,b] \to [a,b]$ une application dérivable. On suppose qu'il existe $k \in]0,1[$ tel que $|f'(x)| < k$ pour tout $x \in [a,b]$. On dit que γ est un point fixe de f si $f(\gamma) = \gamma$

(a) Montrer que f admet un point fixe.

(b) Démontrer que ce point fixe est unique. On le note γ.

(c) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite récurente définis par $u_0 \in [a,b]$ et $u_{n+1} = f(u_n)$. Montrer que (u_n) converge vers γ.

Questions de cours

(a) Soit $f : I \to J$ une bijection continue entre deux intervalles et dérivable en $c \in I$. Montrer que f^{-1} est dérivable en $f(c)$ si et seulement si $f'(c) \neq 0$.

(b) Donner un formule pour $(f^{-1})'(f(c))$.

(c) Donner un exemple de fonction dérivable et bijective dont l'inverse n'est pas dérivable

Exercice 7.

Montrer qu'il existe $M, N > 0$ tels que

$$N|x-y| \leq |e^x - e^y| \leq M|x-y|.$$

Exercice 8.

On pose

$$s_\lambda : x \mapsto \frac{1}{1+e^{-\lambda x}}$$

(a) Quel est le domaine de définition de s_λ ?

(b) Calculer sa dérivée.

(c) Exprimer s_λ et sa dérivée a l'aide de fonctions hyperboliques.

(d) Donner l'inverse de s_λ ainsi que sa dérivée.

Questions de cours

(a) Donner la définition d'une fonction en escalier

(b) Montrer qu'une combinaison linéaire de fonction en escalier est en escalier

(c) Donner un exemple de fonctions en escalier

Exercice 9.

On considére les points $A = (2, \sqrt{3})$ et $B = (3 + \sqrt{2}, \sqrt{2})$ dans $\mathbb{R}^2$

(a) Déterminer l'équation du cercle passant par ces deux points et dont le centre ce trouve sur l'axe des abscisses.

(b) Décrire le demi cercle supérieur contenant A et B comme le graphe d'une fonction. Quel est son ensemble de définition ? Ses extremum ? Son image ?

(c) Déterminer les tangentes au cercle aux points A et B.

(d) Discuter des tangentes au cercle aux points ou il s'intersecte avec l'axe des abscisses.

Exercice 10.

Déterminer

$$\lim_{n\to\infty} (n+1)\arctan(n+1) - n\arctan(n)$$

Questions de cours

(a) Qu'est-ce qu'un minimum d'une fonction ?

(b) Qu'est-ce qu'un point critique d'une fonction dérivable ?

(c) Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonciton deux fois dérivable sur un intervalle ouvert I et $c \in I$ un point critique de f. Montrer que si $f''(c) > 0$ alors f atteint un minimum local en c.

Exercice 11.

On considére la focntion définie par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ e^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x > 0 \end{cases}.$$

Quel est le domaine de definition de f. Montrer que f est C^∞.

Exercice 12 (Théorème de Darboux).

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f one fonction dérivable. On veux prouver que f' vérified le théorème des valeurs intermédiaires.

(a) Soit $a, b \in I$ tels que $f'(a) < f'(b)$, et soit $z \in]f'(a), f'(b)[$. Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $h \in [0, \alpha]$ on ai

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} < z < \frac{f(b+h) - f(b)}{h}.$$

(b) En déduire l'existence d'un réel h et d'un point y de I tels que $y + h \in I$ et

$$z = \frac{f(y+h) - f(y)}{h}$$

(c) Montrer qu'il existe un point $x \in I$ tel que $f'(x) = z$

(d) Conclure.

1 Exercices supplémentaires

Exercice 13.

Soient f, g des fonctions continues sur un interval $[a, b]$ et dérivables sur $]a, b[$. On supose que $f(a) \neq f(b)$ et $g(a) \neq g(b)$. Montrer qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que

$$\frac{f'(c)}{f(a) - f(b)} = \frac{g'(c)}{g(a) - g(b)}$$

Exercice 14.

Soit f une fonction continue sur un interval $[a, b]$, à valeurs strictement positives et dérivable sur $]a, b[$. Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$\frac{f(b)}{f(a)} = \exp\left(\frac{f'(c)(b-a)}{f(c)}\right)$$

Exercice 15.

(a) Construire une suite de fonction continues $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur l'interval $[-1, 1]$ telle que pour tout n
  - f_n soit dérivable en 0 et $f'_n(0) \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$;
  - $\max_{x\in[-1,1]} |f_n(x)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

(b) On muni les l'espace de fonctions continue $C_0([-1, 1], \mathbb{R})$ d'une norme :

$$||f||_\infty = \max_{x\in[0,1]}(|f(x)|)$$

Cette norme est pour les fonctions ce que la valeur absolue est pour les nombres réels. Elle Détermine la distance entre deux fonctions.

  i. Soit $F : C([-1, 1], \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ une application qui a une fonction associe un nombre. A votre avis, quand est-ce qu'on dit que F est continue ?

  ii. En utilisant cette définition et la question (a), montrer que la fonction qui a f associe sa dérivée en 0 n'est pas continue.

Exercice 16 (Point fixe).

Soit $f : x \mapsto 1 + \frac{1}{4}sin(\frac{1}{x})$.

(a) Déterminer $I = f(\mathbb{R}^*$ et montrer que $f(I) \subseteq I$.

(b) Montrer qu'il existe $\gamma \in I$ tel que $f(\gamma) = \gamma$.

(c) Montrer que pour tout $x \in I$ on a $f'(x) \leq \frac{4}{9}$.

(d) On considére la suite définie par récurrence par $u_0 \in \mathbb{R}^*$ et $u_{n+1} = f(u_n)$. Montrer par récurrence que

$$|u_n - \gamma| \leq (\frac{4}{9})^n |u_0 - \gamma|.$$

(e) Qu'en déduisez-vous ?

Exercice 17.

On considère

$$f : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{if } x = 0 \\ x^2 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) & \end{cases}$$

(a) Montrer que f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$

(b) Montrer que la fonction dérivée de f n'est pas continue en 0

Exercice 18.

Soit n un entier et soit f la fonction définie sur $[0,\, 1]$ par $f(x) = \ln(1 + x^n) + x - 1$.

(a) Montrer qu'il existe $c \in [0, 1]$ tel que $f(c) = 0$

(b) Montrer que f est croissante et donc que c est unique.