Questions de cours

Donner la définition d'un espace vectoriel sur un corps $\Bbbk$. Donner deux exemples d'espaces vectoriels de dimension 2.

Exercice 1.

A l'aide de la méthode du pivot de gauss, résoudre le systeme d'équation suivant selon la valeur du paramêtre λ :

$$\begin{cases} x & +y & = mx \\ x & +z & = my \\ y & +z & = mz \end{cases}$$

Exercice 2.

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Questions de cours

Ennoncer la définition du rang d'une matrice où d'un système linéaire. Donner deux exemples de matrices 3×3 de rang 2.

Exercice 3.

Les ensembles suivants sont-ils des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels ?

(a) $E_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 = y^2 \text{ et } xy > 0\}$

(b) L'ensemble $(\mathbb{Z}, \times, \cdot)$ où $t \cdot n = \lfloor t \rfloor \times n$

(c) L'ensemble des matrices de trace nulle dans $\mathcal{M}_{m\times m}(\mathbb{R})$.

Exercice 4.

Calculer le n^{iem} terme de la suite définie par

$$u_0 = 1, u_1 = 1 \text{ et } u_{n+1} = u_n + 2u_{n-1} \forall n \in \mathbb{N}.$$

Indication : Montrer que $A = MDM^{-1}$ où

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, M = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Questions de cours

Qu'est-ce que la forme échelonnée et la forme échelonnée réduite d'une matrice ?

Exercice 5.

On note $E_{i,j}$ Les matrices élémentaires dans $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$.

(a) Soit M une matrice. Calculer $ME_{i,j}$.

(b) Montrer que pour tout $0 \leq i, j, k, l \leq m$ on a

$$E_{i,j}E_{k,l} - E_{k,l}E_{i,j} = \delta_{j,k}E_{i,l} - \delta_{i,l}E_{k,j}$$

où $\delta_{i,j} = 1$ si $i = j$ et zero sinon.

(c) Rappeler comment on exprime les opérations sur les lignes avec les matrices élementaires et la mtrice identité

(d) En déduire unr façon de décrire des opérations sur les colonnes d'une matrice.

Exercice 6.

Soient A et B deux matrices de taille $m \times n$. Montrer que $\text{rang}(A+B) \leq \text{rang}(A) + \text{rang}(B)$

Questions de cours

(a) Définir la trace d'une matrice. Définir le déterminant d'une matrice 2×2.

(b) Décrire l'algorithme du pivtot de Gauss

Exercice 7.

Déterminer le rang de la matrice suivante

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 5 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Exercice 8.

Soit A, B des matrices 2×2. Montrer que

$$\det(I + AB) = \det(I + BA)$$

où I est la matrice identité. traiter d'abord le cas où soit A ou B sont inversibles.

Exercice 9.

Soit x un réel et A une matrice 2×2. On se place sur le corps $\mathbb{C}$.

(a) Montrer que $\det(A - xI) = x^2 - (A)x + \det(A)$. On note ξ_A ce polynôme, c'est le polynôme charactéristique de A.

On appelle polynôme minmal de A le polynôme P de degrés minimal vérifiant $P(A) = 0$

(b) Justifier qu'un tel polynôme existe.

(c) Montrer qu'il est unique.

(d) Soit Q un polynôme. Supposons que $Q(A) = 0$. Montrer que P divise Q

(e) Discuter de la matrice A en fonction du degrés et des racines de P.