Questions de cours

(a) Donner la définitions du rang d'une matrice ou d'un systéme linéaire.

(b) Montrer que tout espace vectoriel de dimension fini admet une base.

Exercice 1(Diagonalisation).

Soit $\lambda \in \mathbb{C}$.On considére le systéme d'equation suivant

$$\begin{cases} x & +y & = \lambda x \\ x & +z & = \lambda y \\ y & +z & = \lambda z \end{cases}$$

(a) A l'aide de la méthode du pivot de gauss, résoudre le système en fonction de la valeur du paramêtre λ. Est-ce que la réponse est différente si on se restreint à $\lambda \in \mathbb{R}$?

(b) Pour chacune des valeurs de de λ identifiés à la question précédente, quelle est la dimension de l'espace des solutions ?

(c) Donner une base de l'espace des solutions pour chaque λ.

(d) Que peut on dire de la famille de vecteurs F ainsi construite ?

On considére la matrice suivante :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

et on note ϕ l'application linéaire associés dans la base canonique

(e) Calculer *rapidement* $\phi(u)$ pour $u \in F$.

(f) Ecrire la matrice de ϕ dans une base bien choisie.

Questions de cours

Donner deux caractérisations différentes de la notion de sous éspace vectoriel. Monter qu'elles sont équivalentes.

Exercice 2.

Les ensembles suivants sont-ils des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels ?

(a) $E_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 = y^2 \text{ et } xy > 0\}$.

(b) $E_2 = \{(x, y) | x + 2y = 0\} \cup \{(x, y) | 2x + y = 0\}$.

(c) L'ensemble des matrices de trace nulle dans $\mathcal{M}_{m\times m}(\mathbb{R})$.

Exercice 3.

Soient A et B deux matrices de taille $m \times n$. Montrer que $\operatorname{rang}(A + B) \leq \operatorname{rang}(A) + \operatorname{rang}(B)$

Questions de cours

(a) Qu'est-ce qu'une application linéaire ?

(b) Montrer que l'intersection de deux sous espaces vectoriels est une sous espace vectoriel.

Exercice 4.

Calculer l'inverse de

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Exercice 5.

Soit F_1 et F_2 des sous espaces vectoriels de E. Montrer que $F_1 \cup F_2$ est un sous espace vectoriel de E si et seulement si $F_1 \subset F_2$ ou $F_2 \subset F_1$

Questions de cours

Donner deux définitions différente de la notion de bases d'un espace vectoriel et montrer qu'elle sont équivalentes

Exercice 6.

Soit E l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Les familles suivantes sont-elles libres dans E ?

(a) $(\sin(x), \cos(x))$;

(b) $(\sin(2x), \cos(x), \sin(x))$;

(c) $(\cos(2x), \cos^2(x), \sin^2(x))$;

(d) $(x, \cos(x), e^x)$

Exercice 7.

Soit x un réel et A une matrice 2×2. On se place sur le corps $\mathbb{C}$.

(a) Montrer que $\det(A - xI) = x^2 - \operatorname{tr}(A)x + \det(A)$. On note ξ_A ce polynôme, c'est le polynôme charactéristique de A.

On appelle polynôme minmal de A le polynôme P de degrés minimal vérifiant $P(A) = 0$

(b) Justifier qu'un tel polynôme existe.

(c) Montrer qu'il est unique.

(d) Soit Q un polynôme. Supposons que $Q(A) = 0$. Montrer que P divise Q

(e) Discuter de la matrice A en fonction du degrés et des racines de P.

1 Exercices suplémentaires

Exercice 8.

Soit A, B des matrices 2×2. Montrer que

$$\det(I + AB) = \det(I + BA)$$

où I est la matrice identité. T raiter d'abord le cas où soit A ou B sont inversibles.

Exercice 9.

On note $E_{i,j}$ Les matrices élémentaires dans $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$.

(a) Soit M une matrice. Calculer $ME_{i,j}$.

(b) Montrer que pour tout $0 \leq i, j, k, l \leq m$ on a

$$E_{i,j}E_{k,l} - E_{k,l}E_{i,j} = \delta_{j,k}E_{i,l} - \delta_{i,l}E_{k,j}$$

où $\delta_{i,j} = 1$ si $i = j$ et zero sinon.

(c) Rappeler comment on exprime les opérations sur les lignes avec les matrices élementaires et la mtrice identité

(d) En déduire unr façon de décrire des opérations sur les colonnes d'une matrice.

Exercice 10.

Déterminer le rang de la matrice suivante

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 5 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Exercice 11.

Calculer le n^{iem} terme de la suite définie par

$$u_0 = 1, u_1 = 1 \text{ et } u_{n+1} = u_n + 2u_{n-1} \forall n \in \mathbb{N}.$$

Indication : Montrer que $A = MDM^{-1}$ où

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, M = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$